

1.3.19 Dlaždění II

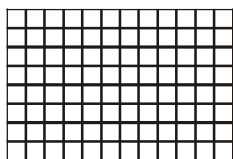
Předpoklady: 010318

Opakování z minulé hodiny:

- Čtvercovou dlaždicí můžeme dláždit pouze čtverce, jejich délka strany je násobkem délky strany dlaždice (například u dlaždice 2×2 můžeme dláždit čtverce a straně délky 2, 4, 6, 8, 10).
- Čtverec můžeme dláždit pouze dlaždicemi, jejichž délka strany je dělitelem délky strany čtverce (například čtverec o délce strany 12, dlaždicemi o straně 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12).

Pedagogická poznámka: Stejně jako v předchozí hodině i v této mají žáci k dispozici čtverečkové papíry, na které mohou kreslit a zkoušet, když si nejsou jistí.

Př. 1: Máme obdélník 8×12 . Jakými čtvercovými dlaždicemi (počítej pouze se stranami o celočíselných hodnotách) můžeme tento obdélník pokrýt? Kolik kterých dlaždic budeme potřebovat? V případě potřeby nakresli situaci na čtverečkový papír. Zapiš všechny možné rozměry dlaždic do tabulky. Do druhé řádky napiš ke každému rozměru potřebný počet dlaždic.



Obsah obdélníku: $8 \cdot 12 = 96 \text{ cm}^2$.

Zkoušíme možné rozměry dlaždic:

- dlaždice 1×1 : vyhovuje v obou směrech, na svislý směr použijeme 8 dlaždic, na vodorovný směr 12 $\Rightarrow$ celkový počet dlaždic $8 \cdot 12 = 96$.
- dlaždice 2×2 : vyhovuje v obou směrech, na svislý směr použijeme $8 : 2 = 4$ dlaždice, na vodorovný směr $12 : 2 = 6 \Rightarrow$ celkový počet dlaždic $4 \cdot 6 = 24$.
Kontrola přes obsahy: Celkový obsah 96, obsah dlaždice: $2 \cdot 2 = 4$, počet dlaždic: $96 : 4 = 24$.
- dlaždice 3×3 : nevyhovuje ve svislém směru protože 8 čtverečků nemůžeme rozdělit po třech (8 není dělitelné 3).
- dlaždice 4×4 : vyhovuje v obou směrech, na svislý směr použijeme $8 : 4 = 2$ dlaždice, na vodorovný směr $12 : 4 = 3 \Rightarrow$ celkový počet dlaždic $2 \cdot 3 = 6$.
Kontrola přes obsahy: Celkový obsah 96, obsah dlaždice: $4 \cdot 4 = 16$, počet dlaždic: $96 : 16 = 6$.
- dlaždice 5×5 : nevyhovují v obou směrech (ani jeden z rozměrů není dělitelný pěti), dlaždice 6×6 nevyhovují ve vodorovném směru, další větší rozměry už určitě nevyhovují.

Závěrečný přehled:

typ dlaždic	1×1	2×2	4×4
počet dlaždic	96	24	6

Pedagogická poznámka: Nejpozději v průběhu následujícího příkladu dojde k tomu, že velká většina žáků sama pochopí, že hledání rozměrů vhodných dlaždic odpovídá hledání společných dělitelů. Jako závěr to však konstatujeme až při kontrole následujícího příkladu.

Př. 2: Máme obdélník 18×12 . Jakými čtvercovými dlaždicemi (počítej pouze se stranami o celočíselných hodnotách) můžeme tento obdélník pokrýt? Kolik kterých dlaždic budeme potřebovat?
Zapiš všechny možné rozměry dlaždic do tabulky. Do druhé řádky napiš ke každému rozměru potřebný počet dlaždic.

Obsah obdélníku: $18 \cdot 12 = 216 \text{ cm}^2$.

Oba rozměry obdélníků musí být dělitelné rozměrem použitých dlaždic $\Rightarrow$ hledáme společné dělitele obou rozměrů obdélníku.

- Dělitelé čísla 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18.
- Dělitelé čísla 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Možné rozměry dlaždic:

- dlaždice 1×1 : na svislý směr použijeme 18 dlaždic, na vodorovný směr 12 $\Rightarrow$ celkový počet dlaždic $18 \cdot 12 = 216$.
- dlaždice 2×2 : na svislý směr použijeme $18 : 2 = 9$ dlaždic, na vodorovný směr $12 : 2 = 6 \Rightarrow$ celkový počet dlaždic $9 \cdot 6 = 54$.
Kontrola přes obsahy: Celkový obsah 216, obsah dlaždice: $2 \cdot 2 = 4$, počet dlaždic: $216 : 4 = 54$.
- dlaždice 3×3 : na svislý směr použijeme $18 : 3 = 6$ dlaždic, na vodorovný směr $12 : 3 = 4 \Rightarrow$ celkový počet dlaždic $6 \cdot 4 = 24$.
Kontrola přes obsahy: Celkový obsah 216, obsah dlaždice: $3 \cdot 3 = 9$, počet dlaždic: $216 : 9 = 24$.
- dlaždice 6×6 : na svislý směr použijeme $18 : 6 = 3$ dlaždic, na vodorovný směr $12 : 6 = 2 \Rightarrow$ celkový počet dlaždic $3 \cdot 2 = 6$.
Kontrola přes obsahy: Celkový obsah 216, obsah dlaždice: $6 \cdot 6 = 36$, počet dlaždic: $216 : 36 = 6$.

Závěrečný přehled:

typ dlaždic	1×1	2×2	3×3	6×6
počet dlaždic	216	54	24	6

Př. 3: Máme obdélník 60×84 . Rozhodni, zda tento obdélník můžeme vydláždit čtvercovými dlaždicemi:
a) 2×2 b) 4×4 c) 5×5 d) 6×6 e) 7×7 f) 10×10 .
Co musí splňovat rozměr dlaždice, kterou je možné dláždit zadaný obdélník?

Oba rozměry obdélníku musí být dělitelné rozměrem dlaždice (aby bylo možné obdélník z dlaždic sestavit).

a) 2×2

Čísla 60 i 84 jsou dělitelná dvěma $\Rightarrow$ obdélník 60×84 můžeme vydláždit dlaždicemi 2×2 .

b) 4×4

Čísla 60 i 84 jsou dělitelná čtyřmi $\Rightarrow$ obdélník 60×84 můžeme vydláždit dlaždicemi 4×4 .

c) 5×5

Číslo 84 není dělitelné pěti $\Rightarrow$ obdélník 60×84 nemůžeme vydláždit dlaždicemi 5×5 .

d) 6×6

Čísla 60 i 84 jsou dělitelná šesti $\Rightarrow$ obdélník 60×84 můžeme vydláždit dlaždicemi 6×6 .

e) 7×7

Čísla 60 i 84 nejsou dělitelná sedmi $\Rightarrow$ obdélník 60×84 nemůžeme vydláždit dlaždicemi 7×7 .

f) 10×10 .

Číslo 84 není dělitelné deseti $\Rightarrow$ obdélník 60×84 nemůžeme vydláždit dlaždicemi 10×10 .

Dlaždice musejí vyjít v obou směrech $\Rightarrow$ oba rozměry obdélníku musí být dělitelné rozměrem dlaždice.

Př. 4: Co nejmenším počtem co největších čtvercových dlaždic máme vydláždit obdélník o stranách 24×36 . Kolik a jakých dlaždic budeme potřebovat?

Máme obdélník 24×36 , hledáme čtvercovou dlaždici (její velikost musí dělit oba rozměry obdélníku) $\Rightarrow$ hledáme společného dělitele čísel 24 a 36.

Hledáme největší dlaždici $\Rightarrow$ hledáme největšího společného dělitele.

$$24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$36 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Největší společný dělitel (součin společných prvočísel v rozkladech): $D = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12 \Rightarrow$ největší čtvercová dlaždice, kterou můžeme vydláždit obdélník 24×36 je dlaždice 12×12 .

Počet dlaždic:

- ve vodorovném směru: $24 : 12 = 2$,
- ve svislém směru: $36 : 12 = 3$.

Celkem budeme potřebovat $2 \cdot 3 = 6$ dlaždic 12×12 .

Pedagogická poznámka: Na následující příklad povolují kalkulačky. Obecně platí, že je žáci mohou používat, pokud se v zadání objeví číslo větší než 100.

Př. 5: Řeš předchozí příklad pro obdélník o rozměrech:

a) $36 \text{ m} \times 48 \text{ m}$

b) $2 \text{ m} \times 2,5 \text{ m}$

c) $2,1 \text{ m} \times 1,8 \text{ m}$

d) $198 \text{ cm} \times 154 \text{ cm}$

e) $1,8 \text{ m} \times 204 \text{ cm}$

Oba rozměry dlážděného obdélníku musí být dělitelné rozměrem dlaždice $\Rightarrow$ hledáme největšího společného dělitele.

a) $36 \text{ m} \times 48 \text{ m}$

$$36 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$48 = 8 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Největší společný dělitel (součin společných prvočísel v rozkladech): $D = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Počet dlaždic:

- ve vodorovném směru: $36 : 12 = 3$,
- ve svislém směru: $48 : 12 = 4$.

Celkem budeme potřebovat $3 \cdot 4 = 12$ dlaždic $12 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$.

Kontrola: Obsah obdélníku: $S = ab = 36 \cdot 48 = 1728$. Obsah dlaždice: $S = a \cdot a = 12 \cdot 12 = 144$, obsah 12 dlaždic: $12 \cdot 144 = 1728$.

b) 2 m x 2,5 m

Převědeme na dm (abychom se vyhnuli desetinným číslům): 20 x 20 dm.

$$20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$25 = 5 \cdot 5$$

Největší společný dělitel (součin společných prvočísel v rozkladech): $D = 5$.

Počet dlaždic:

- ve vodorovném směru: $20 : 5 = 4$,
- ve svislém směru: $25 : 5 = 5$.

Celkem budeme potřebovat $4 \cdot 5 = 20$ dlaždic 0,5 m x 0,5 m.

Kontrola: Obsah obdélníku: $S = ab = 20 \cdot 25 = 500$. Obsah dlaždice: $S = a \cdot a = 5 \cdot 5 = 25$, obsah 20 dlaždic: $20 \cdot 25 = 500$.

c) 2,1 m x 1,8 m

Převědeme na dm (abychom se vyhnuli desetinným číslům): 21 x 18 dm.

$$21 = 3 \cdot 7$$

$$18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Největší společný dělitel (součin společných prvočísel v rozkladech): $D = 3$.

Počet dlaždic:

- ve vodorovném směru: $21 : 3 = 7$,
- ve svislém směru: $18 : 3 = 6$.

Celkem budeme potřebovat $7 \cdot 6 = 42$ dlaždic 0,3 x 0,3.

Kontrola: Obsah obdélníku: $S = ab = 21 \cdot 18 = 378$. Obsah dlaždice: $S = a \cdot a = 3 \cdot 3 = 9$, obsah 42 dlaždic: $42 \cdot 9 = 378$.

d) 198 cm x 154 cm

$$198 = 3 \cdot 66 = 3 \cdot 6 \cdot 11 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$$

$$154 = 7 \cdot 22 = 2 \cdot 7 \cdot 11$$

Největší společný dělitel (součin společných prvočísel v rozkladech): $D = 2 \cdot 11 = 22$.

Počet dlaždic:

- ve vodorovném směru: $198 : 22 = 9$,
- ve svislém směru: $154 : 22 = 7$.

Celkem budeme potřebovat $9 \cdot 7 = 63$ dlaždic 22 x 22.

Kontrola: Obsah obdélníku: $S = ab = 198 \cdot 154 = 30\,492$. Obsah dlaždice:

$$S = a \cdot a = 22 \cdot 22 = 484, \text{ obsah } 63 \text{ dlaždic: } 63 \cdot 484 = 30\,492.$$

e) 1,8 m x 204 cm

První vzdálenost převědeme na cm (abychom se vyhnuli desetinným číslům): 180 x 204 dm.

$$180 = 10 \cdot 18 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$204 = 4 \cdot 51 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17$$

Největší společný dělitel (součin společných prvočísel v rozkladech): $D = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Počet dlaždic:

- ve vodorovném směru: $180 : 12 = 15$,
- ve svislém směru: $204 : 12 = 17$.

Celkem budeme potřebovat $15 \cdot 17 = 255$ dlaždic 12 cm x 12cm.

Kontrola: Obsah obdélníku: $S = ab = 180 \cdot 204 = 36\,720$. Obsah dlaždice:
 $S = a \cdot a = 12 \cdot 12 = 144$, obsah 255 dlaždic: $255 \cdot 144 = 36\,720$.

Shrnutí: Při hledání čtvercové dlaždice pro dláždění obdélníkové plochy hledáme největšího společného dělitele obou rozměrů.